DS n°2 : Calcul (etc.) – Corrigé

Noté sur 110 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/95.

Exercice 1 : Calcul de sommes

/3,5 **1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \sum_{i=1}^{n+1} i(3i - 2n)$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{n+1} i(3i-2n) \\ &= 3\sum_{i=1}^{n+1} i^2 - 2n\sum_{i=1}^{n+1} i \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2} - 2n\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= (n+1)(n+2) \times \left(\frac{2n+3}{2} - \frac{2n}{2}\right) \\ &= \boxed{(n+1)(n+2) \times \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

2) Calculer $S_2 = \sum_{j=0}^{2024} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\frac{\pi}{2}\right)^j$ (dans cette question, i désigne le
/3 nombre complexe usuel)

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=0}^{2024} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\frac{\pi}{2}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{2024} i^j \\ &= \frac{1-i^{2025}}{1-i} \qquad \text{car } i \neq 1 \end{aligned}$$

Or, $i^{2025} = i \times i^{2024} = i \times (-1)^{1012} = i \times 1 = i$. Ainsi,

$$S_2 = \frac{1-i}{1-i} = \boxed{1}$$

/5 **3)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k(-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$

On raisonne par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} k(-1)^k = 1 \times (-1) = -1$$

$$\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} = \frac{-(2+1)-1}{4} = -1$$

L'initialisation est donc vérifiée.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$. Montrons que la formule reste vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(-1)^k &= \sum_{k=1}^{n} k(-1)^k + (n+1)(-1)^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (n+1)(-1)^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n(2n+1)-1+4(n+1)(-1)^{n+1}}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\left[4(n+1)-(2n+1)\right]-1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4} \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé la formule au rang $n+1$.

- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

/5,5 **4)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$

On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i}\\
=&\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\\
=&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}-\binom{j}{0}\right)\\
=&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i1^{j-i}-1\right)\\
=&\sum_{j=1}^{n}(2^j-1)\\
=&\sum_{j=1}^{n}2^j-n\\
=&2\times\frac{1-2^n}{1-2}-n \qquad \text{car } 2\neq 1\\
=&2\times(2^n-1)-n\\
=&\boxed{2^{n+1}-2-n}
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes :

/3 **1)** $|2x-5|=-1-x$ dans $\mathbb{R}$.

- Si $x\geq\dfrac{5}{2}$, l'équation devient

$$\begin{aligned}
&2x-5=-1-x\\
\iff &3x=4\\
\iff &x=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Or, $x\geq\frac{5}{2}$, donc dans ce cas il n'y a pas de solution : $\mathcal{S}_1=\varnothing$.

- Si $x\leq\dfrac{5}{2}$, l'équation devient

$$\begin{aligned}
&-2x+5=-1-x\\
\iff &6=x
\end{aligned}$$

Or, $x\leq\frac{5}{2}$, donc là encore, dans ce cas, il n'y a pas de solution : $\mathcal{S}_2=\varnothing$.

Finalement, on obtient :

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2=\boxed{\varnothing}$$

(Note : une résolution par analyse-synthèse était également une bonne façon de conclure.)

/4 **2)** $\cos x=\sin x$ dans $\mathbb{R}$.

(Beaucoup de méthodes sont possibles. En voici une très courte)

$$\begin{aligned}
&\cos x=\sin x\\
\iff &\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\
\iff &x\equiv\frac{\pi}{2}-x\ [2\pi] \quad\text{ou}\quad x\equiv x-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\
\iff &2x\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad\text{ou}\quad 0\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\
\iff &x\equiv\frac{\pi}{4}\ [\pi] \qquad \text{car } 0\not\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}=\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}}$$

/6 **3)** $2x-\sqrt{x}-1\leq 0$ dans $\mathbb{R}$.

$\sqrt{x}$ n'a un sens que si $x\in\mathbb{R}_+$. On résout donc l'équation sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
&2x-\sqrt{x}-1\leq 0\\
\iff &2\sqrt{x}^2-\sqrt{x}-1\leq 0
\end{aligned}$$

On pose $X=\sqrt{x}\in\mathbb{R}_+$. Ainsi, x est solution si et seulement si

$$\begin{aligned}
&2X^2-X-1\leq 0\\
\iff &(X-1)(2X+1)\leq 0 \qquad \text{(1 est racine évidente)}
\end{aligned}$$

Les racines du polynôme $2X^2 - X - 1$ sont donc 1 et $-\dfrac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & 2X^2 - X - 1 \leq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & X \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{x} \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{x} \in [0,1] \qquad \text{car } \sqrt{x} \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 0 \leq x \leq 1 \qquad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = [0,1]}$$

/6 **4)** $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \quad$ dans $\mathbb{R}$

$\dfrac{2x-3}{x^2-4}$ n'a un sens que si $x \notin \{-2, 2\}$. Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\begin{aligned} & \frac{2x-3}{x^2-4} < 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 1 - \frac{2x-3}{x^2-4} > 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{x^2-4-2x+3}{x^2-4} > 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{x^2-2x-1}{x^2-4} > 0 \end{aligned}$$

Étudions le signe du numérateur et du dénominateur. Le discriminant du numérateur est

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-1) = 8 > 0$$

Les racines sont donc

$$r_- = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \qquad r_+ = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Construisons enfin le tableau de signes :

x	$-\infty \quad -2$	$-2 \quad r_-$	$r_- \quad 2$	$2 \quad r_+$	$r_+ \quad +\infty$
$x^2 - 2x - 1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Si bien que

$$S = \boxed{]-\infty, -2[\cup]1-\sqrt{2}, 2[\cup]1+\sqrt{2}, +\infty[}$$

/5 **5)** $\sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5 \quad$ dans $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 5$, alors $x - 5 < 0 \leq \sqrt{|x^2-1|}$, donc dans ce cas,

$$S_1 = \varnothing$$

- Si $x \geq 5$, alors $x - 5 \geq 0$ et de plus $x^2 - 1 \geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sqrt{|x^2-1|} = x - 5 \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{x^2-1} = x - 5 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 - 1 = (x-5)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 - 1 = x^2 - 10x + 25 \\ \Longleftrightarrow\ & 10x = 26 \\ \Longleftrightarrow\ & x = \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Or, on constate que $\dfrac{13}{5} < 5$, donc dans ce cas,

$$S_2 = \varnothing$$

Finalement,

$$S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$$

Exercice 3 : Ensembles

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

/5 **1)** Montrer que $(A \cup B) \cap C \ \subset \ A \cup (B \cap C)$.

On a $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Or, $A \cap C \subset A$. On en déduit que

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C)$$

donc

$$(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$$

2) Avec un contre-exemple simple, montrer que l'inclusion réciproque est fausse en
/4 général.

On pose

$$A = [0, 1] \qquad B = C = \varnothing$$

On a alors

$$(A \cup B) \cap C = [0, 1] \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup (B \cap C) = [0, 1] \cap \varnothing = [0, 1]$$

On voit donc qu'il n'y a pas d'inclusion réciproque dans ce cas.

/7 **3)** Démontrer que $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ si et seulement si $A \subset C$.

On raisonne par double inclusion.

- On suppose $A \subset C$. On a alors

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= A \cup (B \cap C) \qquad \text{car } A \subset C\end{aligned}$$

- On suppose $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$. Montrons que $A \subset C$. Or, on a

$$\begin{aligned}A &\subset A \cup (B \cap C) \\ &= (A \cup B) \cap C \\ &\subset C\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4 : Une formule de retournement de sommes

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

/3,5

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 1^{n-k} \\ &= (-1+1)^n \qquad \text{avec la convention } 0^0 = 1 \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}}\end{aligned}$$

2) Soit $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Comparer les valeurs de

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

/2,5

On a

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{\ell!(k-\ell)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell} &= \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!} \times \frac{(n-\ell)!}{(n-\ell-(k-\ell))!(k-\ell)!} \\ &= \frac{n!}{\ell!} \times \frac{1}{(n-k)!(k-\ell)!}\end{aligned}$$

On constate que les deux valeurs sont égales : on a donc

$$\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}}$$

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$y_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

/12

(Soit $n \in \mathbb{N}$.)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} x_\ell \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} x_\ell \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} x_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} x_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x_\ell \sum_{k=\ell}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-\ell}{k-\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x_\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} (-1)^{n-j-\ell} \binom{n-\ell}{j} \qquad \text{avec } j = k-\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x_\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-j} \binom{n-\ell}{j} 1^j \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x_\ell (-1+1)^{n-\ell}
\end{aligned}$$

(On ne doit pas conclure trop vite que cela donne 0 justement ! Il faut se souvenir de la question 1). On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} x_\ell (-1+1)^{n-\ell} + \binom{n}{n} x_n \times 1 \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} x_\ell 0^{n-\ell} + x_n \\
&= 0 + x_n = \boxed{x_n}
\end{aligned}$$

Exercice 5 : Partie entière

Montrer l'assertion suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

/13

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x (idem pour y).

On a trivialement $\begin{cases} x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \\ 0 \leq \{x\} < 1 \end{cases}$ et idem pour y. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
&\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \\
&= \lfloor x \rfloor + \lfloor\ (\lfloor x \rfloor + \{x\}) + (\lfloor y \rfloor + \{y\})\ \rfloor + \lfloor y \rfloor \\
&= \lfloor x \rfloor + \lfloor\ \{x\} + \{y\}\ \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor y \rfloor \qquad \text{car } \lfloor x \rfloor \text{et } \lfloor y \rfloor \text{sont des entiers.} \\
&= 2\lfloor x \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor + 2\lfloor y \rfloor
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor &= \lfloor 2(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor + \lfloor 2(\lfloor y \rfloor + \{y\}) \rfloor \\
&= 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\{x\} \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor
\end{aligned}$$

En combinant ces relations, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \\
\iff\ & 2\lfloor x \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor + 2\lfloor y \rfloor \leq 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\{x\} \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \\
\iff\ & \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \leq \lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor
\end{aligned}$$

Vérifions que cette dernière inégalité est vraie. Tout d'abord,

$$\begin{cases} 0 \leq \{x\} < 1 \\ 0 \leq \{y\} < 1 \end{cases} \implies 0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$$

- Si $\{x\} + \{y\} < 1$, alors $\lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor = 0$. De plus, $2\{x\} \geq 0$ donc (par croissance de la partie entière), on a $\lfloor 2\{x\} \rfloor \geq 0$ et de même pour $\lfloor 2\{y\} \rfloor$. On en déduit qu'on a bien

$$\lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor = 0 \leq \lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor$$

- Si $1 \leq \{x\} + \{y\} < 2$, alors $\lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor = 1$. De plus, nécessairement, $\{x\} \geq \frac{1}{2}$ ou $\{y\} \geq \frac{1}{2}$ (puisque leur somme fait au moins 1).
  - Supposons par exemple que $\{x\} \geq \frac{1}{2}$. Alors $2\{x\} \geq 1$ donc $\lfloor 2\{x\} \rfloor \geq 1$. De plus, comme $\lfloor 2\{y\} \rfloor \geq 0$ (puisque $\{y\} \geq 0$) on a

$$\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq 1 + 0 = \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$$

    On en déduit là encore le résultat voulu.
  - Le même raisonnement fonctionne lorsque $\{y\} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 6 : Complexes

Soit $z, u, v \in \mathbb{C}$ tels que $z = u + i\,v$. Montrer que

$$|z|^2 = u^2 + v^2 \iff \Big((u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{ou} \quad z = 0 \Big)$$

/15

On procède par double implication.

- Supposons $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ou $z = 0$. Montrons que $|z|^2 = u^2 + v^2$.
  - Si u, v sont réels, alors $\operatorname{Re} z = u$ et $\operatorname{Im} z = v$, si bien que

$$|z|^2 = u^2 + v^2$$

  - Si $z = 0$, alors $u + i\,v = 0$, donc $u = -i\,v$. Ainsi,

$$u^2 + v^2 = (-i\,v)^2 + v^2 = -v^2 + v^2 = 0 = |z|^2$$

  Dans tous les cas, on a donc bien $|z|^2 = u^2 + v^2$.

- Supposons $|z|^2 = u^2 + v^2$. Montrons que $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ou $z = 0$.
  - Si $z = 0$, alors il n'y a rien à démontrer.
  - On suppose donc $z \neq 0$. Montrons qu'alors $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que

$$u^2 + v^2 = (u + i\,v)(u - i\,v)$$

$$\begin{aligned} |z|^2 = z\overline{z} &= (u + i\,v)(\overline{u + i\,v}) \\ &= (u + i\,v)(\overline{u} - i\,\overline{v}) \end{aligned}$$

    Ainsi,

$$\begin{aligned} & |z|^2 = u^2 + v^2 \\ \implies & (u + i\,v)(\overline{u} - i\,\overline{v}) = (u + i\,v)(u - i\,v) \\ \implies & \overline{u} - i\,\overline{v} = u - i\,v \qquad \text{car } u + i\,v \neq 0 \\ \implies & u - \overline{u} = i\,(v - \overline{v}) \\ \implies & 2i\,\operatorname{Im} u = i\ \times 2i\,\operatorname{Im} v \\ \implies & \operatorname{Im} u = i\,\operatorname{Im} v \\ \implies & \operatorname{Im} u - i\,\operatorname{Im} v = 0 \\ \implies & \operatorname{Im} u = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} v = 0 \qquad \text{car } \operatorname{Im} u, \operatorname{Im} v \in \mathbb{R} \\ \implies & u \in \mathbb{R} \text{ et } v \in \mathbb{R} \\ \implies & (u, v) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

    D'où le résultat voulu.

Finalement, on a bien montré l'équivalence demandée.